

2. Interacción radiación-materia

Tipos de cargas:

- **Cargas libres:** no están enlazadas dentro de un átomo. Se suponen puntuales. Basta con especificar su carga, masa y trayectoria.

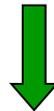
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

- **Cargas ligadas:** son sistemas de carga con estructura interna: átomos, moléculas, agregados de moléculas ... Para describirla utilizamos la teoría clásica pero con ciertas hipótesis.

2. Interacción radiación-materia

Radiación de ondas electromagnéticas

Hay que ver la relación existente entre las o.e.m. y las distribuciones de carga y de corrientes eléctricas que las generan: encontrar la emisión de un sistema de cargas caracterizado por ρ y por \mathbf{j} .



Se solucionan las ecuaciones de Maxwell, con ρ y \mathbf{j} .
Las cargas y corrientes van a ser función del tiempo.

El cálculo de los campos E y B puede ser complicado. Se resuelve para unos casos particulares.

2. Interacción radiación-materia

1. Sistema de cargas lejano. Radiación dipolar eléctrica.

Se calcula el campo creado por un sistema (de longitud l) de cargas en movimiento.

Se supone que $l \ll \lambda$, que es equivalente a que los campos varíen muy poco en distancias del orden de l ($v \ll c$).

Se obtienen unos campos de la forma:

$$\vec{E}(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \frac{\vec{\wp}(t')}{R}) - \frac{\mu_0}{4\pi R} (\frac{\partial^2 \vec{\wp}(t')}{\partial t'^2}),$$

$$\vec{B}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge (\frac{1}{R} \frac{\partial \vec{\wp}(t')}{\partial t'}), \quad t' = t - \frac{R}{c}$$

$$\vec{\wp} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad \longrightarrow \quad \text{Momento dipolar eléctrico del sistema de cargas.}$$

$l \approx 0.1 \text{ nm}$  La aproximación es válida para el UV, visible e IR.

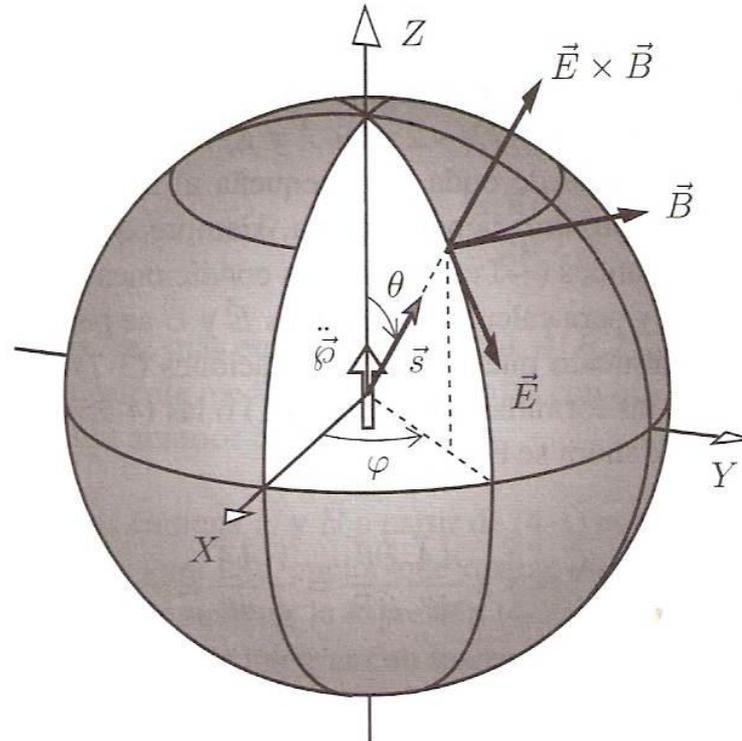
2. Interacción radiación-materia

- * Zona de ondas. Emisión de luz visible por un átomo a distancias macroscópicas, $l \ll R$, ($R \sim 0.5$ m): la onda se puede considerar como plana en un entorno pequeño del frente de ondas (~ 1 cm):

$$\vec{E}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left(\frac{d^2 \vec{\phi}(t')}{dt'^2} \wedge \vec{s} \right) \wedge \vec{s}$$

$$\vec{B}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c R} \frac{d^2 \vec{\phi}(t')}{dt'^2} \wedge \vec{s}$$

\vec{s} dirección de observación



2. Interacción radiación-materia

- Algunas conclusiones:
 1. Los campos son inversamente proporcionales a R, en vez de a R³.
 2. En este caso el sistema sólo radia en forma dipolar eléctrica si las cargas están aceleradas:

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{d^2 \vec{\phi}(t')}{dt'^2} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{a}_i(t')$$

La potencia radiada:

Vector de Poynting para o.a.p. $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2 \vec{s} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{s}$

Potencia en un elemento de superficie df :

$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{f} = \frac{c}{\mu_0} B^2 R^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \frac{d^2 \vec{\phi}}{dt^2} \wedge \vec{s} \right|^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \frac{d^2 \vec{\phi}}{dt^2} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

Potencia total emitida:

$$P(t') = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \frac{d^2 \phi(t')}{dt'^2} \right|^2$$

2. Interacción radiación-materia

2. Radiación multipolar.

Al no despreciar términos en v/c aparecen términos correctores.

La potencia total radiada por el sistema es de la forma:

$$\vec{P}(t') = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{d^2 \vec{\rho}(t')}{dt'^2} \right)^2 + \frac{\mu_0}{720\pi c^3} \left(\frac{d^3 \vec{Q}(t')}{dt'^3} \right)^2 + \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{d^2 \vec{m}(t')}{dt'^2} \right)^2$$

con \mathbf{Q} el producto del momento cuadrupolar del sistema por el vector unidad en la dirección de observación, y \mathbf{m} el momento dipolar magnético.

Tenemos *radiación cuadrupolar eléctrica y dipolar magnética*.

Como $l \ll \lambda$ estas contribuciones no son observables (en λ ópticas).

2. Interacción radiación-materia

3. Carga oscilante.

Carga con movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio (tomamos esa dirección como eje z).

Es equivalente a un dipolo oscilante con momento dipolar eléctrico:

$$\vec{\phi}(t) = q\vec{r}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{con } \mathbf{r}_0 \text{ la separación máxima.}$$

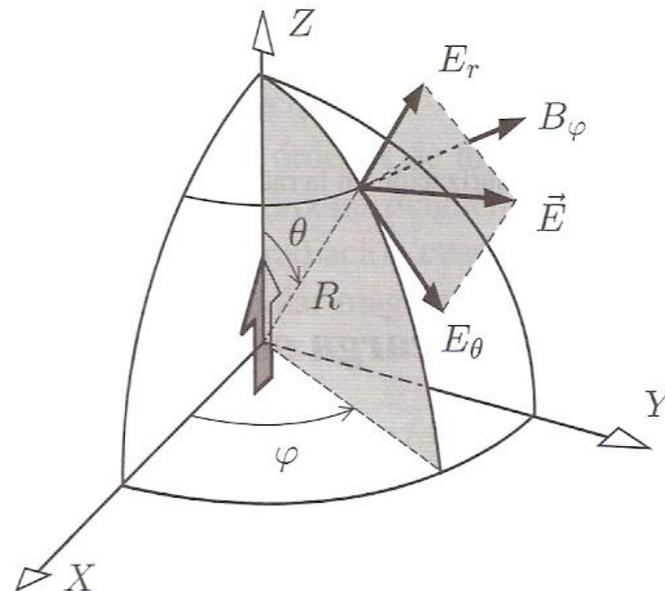
$$E_r = \frac{-qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left(\frac{2}{(kR)^3} - \frac{2i}{(kR)^2} \right) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$E_\theta = \frac{-qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left(\frac{1}{(kR)^3} - \frac{i}{(kR)^2} - \frac{1}{kR} \right) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$E_\varphi = 0$$

$$B_r = 0, \quad B_\theta = 0$$

$$B_\varphi = \frac{qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0 c} \sin\theta \left(\frac{i}{(kR)^2} + \frac{1}{kR} \right) e^{i(kR - \omega t)}$$



2. Interacción radiación-materia

Las líneas de campo de \mathbf{B} son círculos perpendiculares al dipolo y las de \mathbf{E} son curvas en planos que contiene al dipolo y \mathbf{E} tiene simetría de revolución alrededor del dipolo. Son campos que oscilan a la misma frecuencia que la carga.

Los campos serán diferentes dependiendo de la zona de observación:

- A distancias cortas: $r_0 \ll R \ll \lambda$

El campo es el de un dipolo estático.

- A distancias intermedias: R del orden de λ .

La expresión para los campos es complicada y no tienen una λ bien definida.

2. Interacción radiación-materia

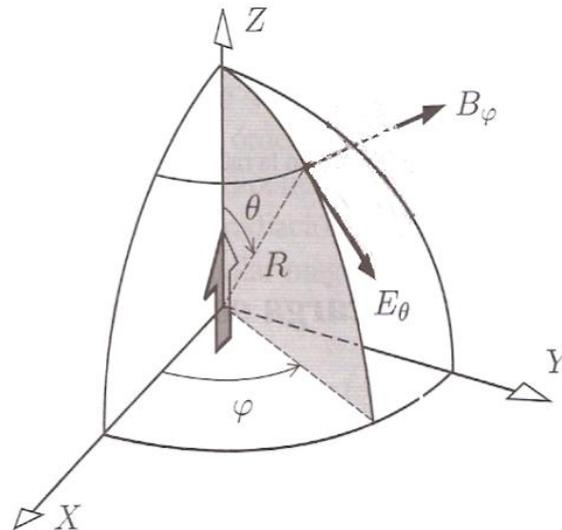
- A distancias grandes: $R \gg \lambda$.

Los campos son los correspondientes a ondas planas.

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} = cB_{\varphi} &= \frac{qr_0k^2}{4\pi R\epsilon_0} \sin\theta \cdot e^{i(kR-\omega t)} \\ E_{\varphi} = E_r = B_r = B_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



E y B son ortogonales entre sí
y a la dirección radial.



2. Interacción radiación-materia

La potencia radiada por el dipolo es:

$$\left. \begin{aligned} P_{TOT} &= \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt'^2} \right|^2 \\ \vec{\rho}(t) &= qr_0 e^{-i\omega t} \vec{z} \end{aligned} \right\} \longrightarrow P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} (qr_0 \omega^2 \cos(\omega t))^2$$

La potencia media:

$$\langle P \rangle = \frac{(qr_0)^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{|\rho_0|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

Conclusiones:

- La potencia no depende de la masa de la partícula.
- La dependencia es con ω^4 : la potencia aumentan rápidamente con la frecuencia.

2. Interacción radiación-materia

4. Emisión del oscilador amortiguado.

Desexcitación de un átomo previamente excitado: el electrón radia energía como consecuencia de la aceleración que posee en su vibración.

Modelo de Lorentz del oscilador amortiguado:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}$$

\mathbf{r} es el vector de posición del electrón, ω_0 la frecuencia de oscilación libre, $\gamma/2$ la constante de amortiguamiento, originada por la pérdida de energía por la emisión de o.e.m.:

$$\gamma = \frac{q^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}$$

2. Interacción radiación-materia

Para frecuencias del visible ($\omega_0 \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$) γ es del orden de 10^8 s^{-1} .

$\gamma \ll \omega_0$  el electrón realiza un número enorme de oscilaciones antes de que el amortiguamiento sea apreciable.

 La onda es cuasi-monocromática

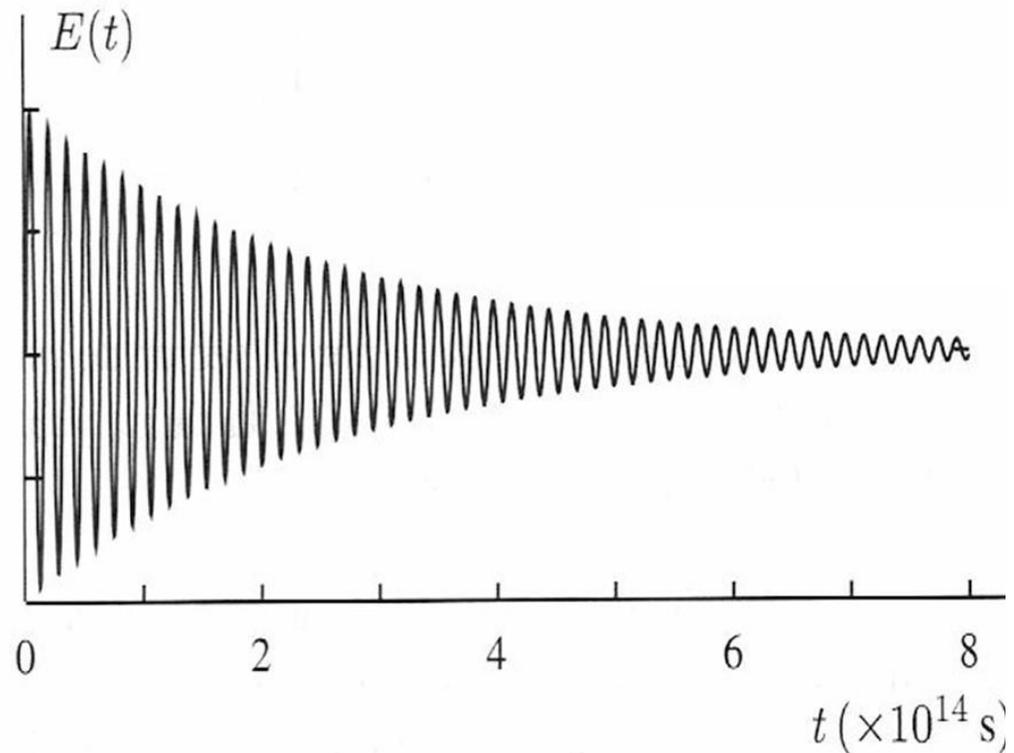
$$\vec{\phi}(t) = q\vec{r}(t)$$

Suponemos zona de ondas ($1 \ll \lambda \ll R$), que el eje X es la dirección de oscilación del dipolo, la dirección de observación el eje Z y que $\gamma \ll \omega_0$. Para obtener el campo utilizamos la expresión para el dipolo en la zona de ondas.

$$\vec{E}(z, t) \approx \frac{\omega_0^2 q r_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 z} e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)\left(t - \frac{z}{c}\right)} \vec{u}_x = E_0 e^{\frac{-\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0\left(t - \frac{z}{c}\right)} \vec{u}_x$$

2. Interacción radiación-materia

El campo \mathbf{E} oscila amortiguadamente de la misma forma que el desplazamiento del dipolo.



2. Interacción radiación-materia

El espectro en frecuencias es:

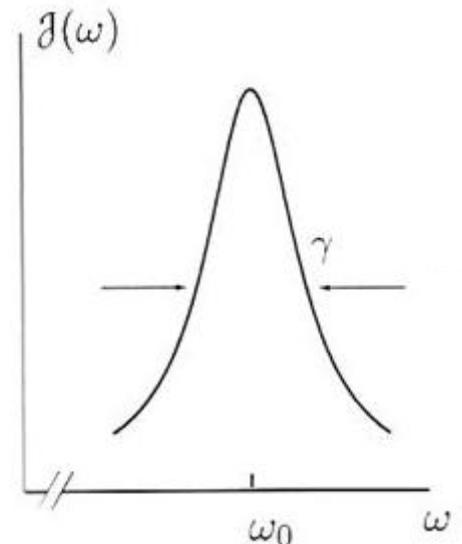
$$E_{\omega} = \frac{E_0 e^{i\omega_0 z/c}}{\gamma/2 - i(\omega - \omega_0)} \quad \text{Típica función de resonancia}$$

La densidad de energía espectral: cantidad de energía e.m. por unidad de unidad espectral que llega por unidad de superficie:

$$J(\omega) = \varepsilon_0 c |E_{\omega}|^2 = J(\omega_0) \frac{\gamma^2/4}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

La emisión es muy intensa para la frecuencia de resonancia y decae rápidamente al alejarnos de esa frecuencia.

La vida media del oscilador es de $1/\gamma \cdot 10^{-8}$ s, es el tiempo antes de que la amplitud de la oscilación se haga muy pequeña.



2. Interacción radiación-materia

Absorción y esparcimiento de o.e.m.

La energía transferida a las cargas da origen a dos procesos:

1. Esparcimiento: las cargas reemiten esa energía en forma de o.e.m. en direcciones diferentes a la que lleva la onda incidente.

* Esparcimiento de Rayleigh: la frecuencia reemitida es la misma que la incidente.

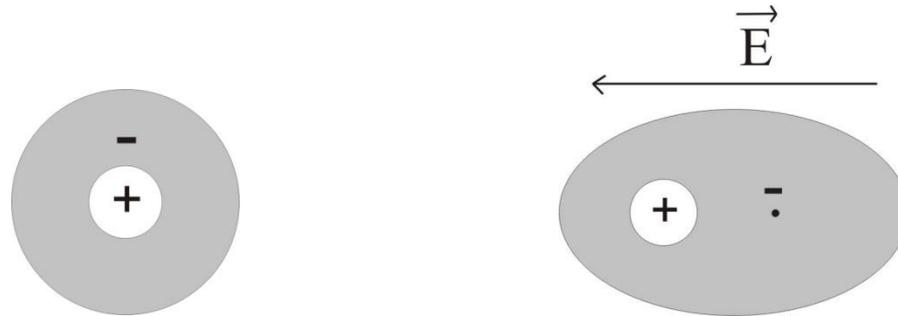
* Esparcimiento de Raman y Brillouin: la frecuencia es diferente.

2. Absorción: la energía se transforma en energía potencial y se disipa en forma de agitación térmica o calentamiento. Esta *radiación térmica* tiene una frecuencia muy diferente a la incidente.

2. Interacción radiación-materia

Ecuación de movimiento de la carga (Esparcimiento de carga ligada)

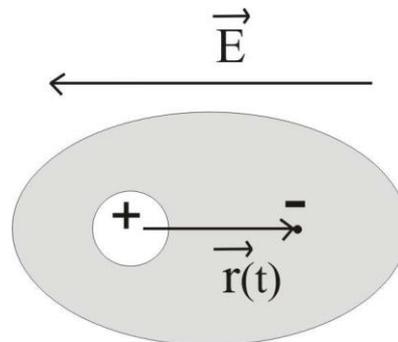
- Cuando un campo e.m. perturba el átomo los centros de las cargas + y - ya no coinciden y se forma un pequeño dipolo (se excita el átomo).



Estado fundamental

Estado excitado

- El átomo se opone a esta perturbación y aparece una fuerza de recuperación.



2. Interacción radiación-materia

Ecuación de movimiento de la carga (Esparcimiento de carga ligada)

- Se supone que la separación inducida entre centros de carga es muy pequeña y que la fuerza es lineal a este desplazamiento:

$$\vec{F}_{\text{int}}(\vec{r}) \cong -m\omega_0^2 \vec{r} \quad (2.1)$$

con m la masa del electrón y ω_0 la frecuencia de resonancia.

- La fuerza que ejerce el campo e.m. viene dado por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B})$$

2. Interacción radiación-materia

Ecuación de movimiento de la carga (Esparcimiento de carga ligada)

- Hay que tener en cuenta los mecanismos de pérdidas:

$$\vec{F}_{pérd} = -\gamma m \dot{\vec{r}}$$

La ecuación dinámica para la carga ligada es:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{Lorentz} - m \omega_0^2 \vec{r} - \gamma m \dot{\vec{r}} \quad (2.2)$$

2. Interacción radiación-materia

Ecuación de movimiento de la carga ligada en el caso de que la onda incidente sea una o.a.p.

En este caso los campos son de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$$

Hay que solucionar la ecuación del movimiento con esos campos:

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}) - m\omega_0^2 \vec{r} - \gamma m\dot{\vec{r}}$$

2. Interacción radiación-materia

Para poder solucionar esta ecuación hay que hacer unas aproximaciones:

1. Suponemos que $(dr/dt) \ll c$. Llevando esto a la fuerza de Lorentz, queda

$$\vec{F}_{Lorentz} \cong q\vec{E} \quad \longrightarrow$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r} - \gamma m\dot{\vec{r}} = q(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}) - m\omega_0^2\vec{r} - \gamma m\dot{\vec{r}}$$

2. Interacción radiación-materia

2. Suponemos que la separación entre las cargas + y - es mucho menor que la longitud de onda:

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(0)| \ll \lambda$$



$$\vec{k} \cdot \vec{r}(t) \cong \vec{k} \cdot \vec{r}(0) = cte$$



$$\vec{F}_L \cong q(\vec{E}_0 e^{-i\omega t})$$

Con estas suposiciones la ecuación a resolver queda:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} (\vec{E}_0 e^{-i\omega t})$$

Ecuación de oscilador armónico amortiguado

2. Interacción radiación-materia

Una solución es:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$$

Introduciendo esta solución en la ecuación del oscilador se obtiene:

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)\vec{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q}{m}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t})$$

$$\vec{r}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}_0$$

$$\vec{r}(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$



Trayectoria de la carga ligada

2. Interacción radiación-materia

De esta expresión de la trayectoria podemos sacar algunas conclusiones:

1. El desplazamiento de las cargas es proporcional al campo.
2. El desplazamiento es complejo.
3. La constante de proporcionalidad depende de la frecuencia del campo incidente.
4. Cuando la frecuencia forzadora está próxima a la frecuencia de resonancia, las oscilaciones serán muy fuertes. La aproximación del tratamiento clásico funciona peor.

2. Interacción radiación-materia

Comprobación de las hipótesis:

$$\dot{r} \ll c$$

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(0)| \ll \lambda$$

Tomamos el caso de luz solar y electrones como carga ligada.

Para la luz solar

$$|\vec{E}_0|_{solar} \approx 10^3 \frac{V}{m}$$

Una frecuencia típica del visible es: $\omega \approx 3 \cdot 10^{15} \frac{rad}{s}$

Se tiene en cuenta que $\gamma \approx 10^8 s^{-1}$ y los datos de masa y carga del electrón.

$$|\vec{r}_0| \approx 2 \cdot 10^{-17} m = 2 \cdot 10^{-8} nm$$

Para $\lambda = 600nm$: $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \leq 2 \cdot 10^{-8} nm \ll \lambda = 600nm$

La velocidad máxima es del orden de:

$$|\vec{r}_0| \omega \approx 6 \cdot 10^{-2} m/s \ll c$$

2. Interacción radiación-materia

Se define la *sección eficaz de extinción* como la potencia total que cada partícula extrae de la onda incidente, de intensidad I :

$$P = \sigma_e I$$

Engloba a las pérdidas por esparcimiento y por absorción.

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -qE_R v_R dt$$

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{q^2 |\vec{E}_0|^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

2. Interacción radiación-materia

Sección Eficaz: (unidades de m²)

$$\sigma_e = \frac{\langle P \rangle}{\langle |S| \rangle} = \frac{\langle P \rangle}{c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle} = \frac{q^2}{mc\epsilon_0} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\sigma_e(\omega) = \frac{q^2}{mc\epsilon_0} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

2. Interacción radiación-materia

Despreciando las pérdidas por absorción, la sección eficaz de extinción es entonces la de esparcimiento:

$$\sigma_e(\omega) = \sigma_s(\omega) = \frac{q^4}{6\pi m^2 c^4 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

- Cuando $\omega \gg \omega_0$: sección eficaz constante.
- Para $\omega = \omega_0$, se produce un pico muy estrecho.
- Para $\omega \ll \omega_0$:

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad \rightarrow \quad \text{Esparcimiento de Rayleigh}$$

2. Interacción radiación-materia

Solución para carga libre

Una carga libre q inmóvil que es alcanzada por una o.a.p. En este caso no tenemos frecuencia de resonancia:

$$\vec{r}(t) = \frac{-q/m}{\omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Para este caso la sección eficaz de esparcimiento es:

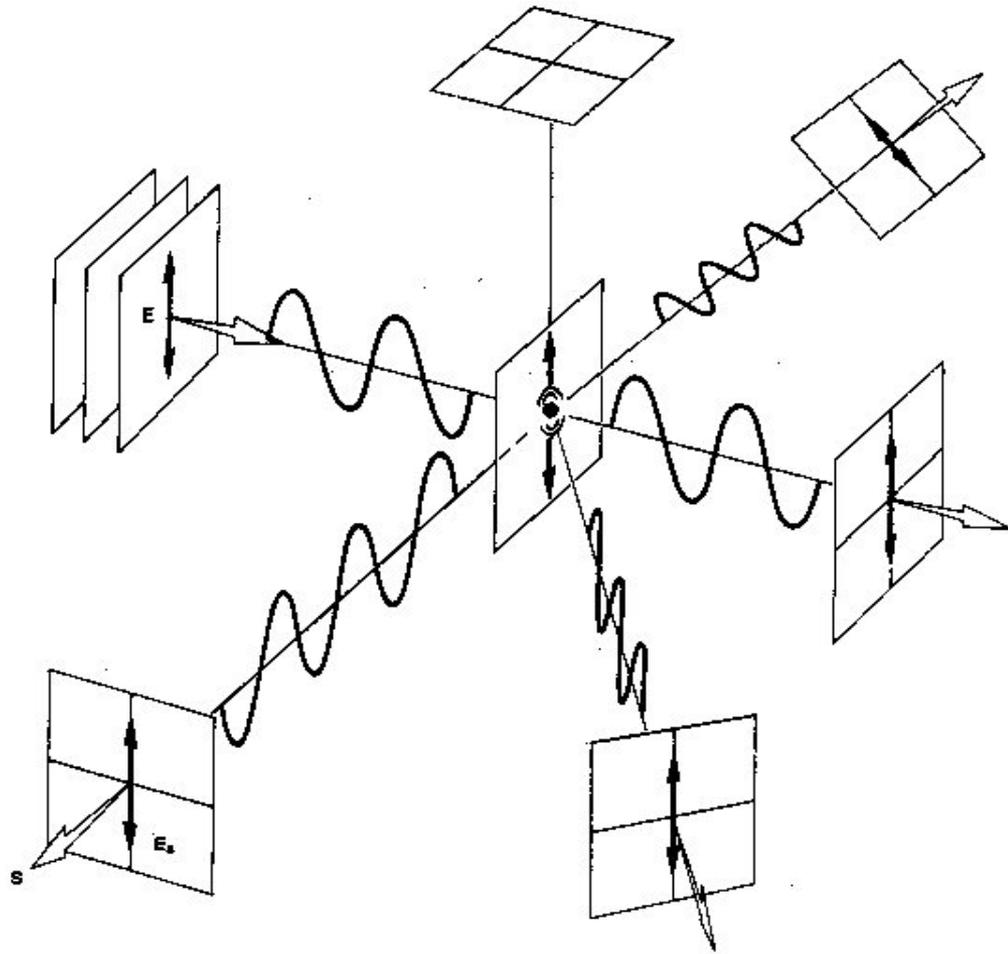
$$\sigma_s = \frac{q^4}{6\pi m^2 c^4 \epsilon_0^2}$$

que no depende de la frecuencia de la onda incidente.

2. Interacción radiación-materia

Polarización de luz esparcida

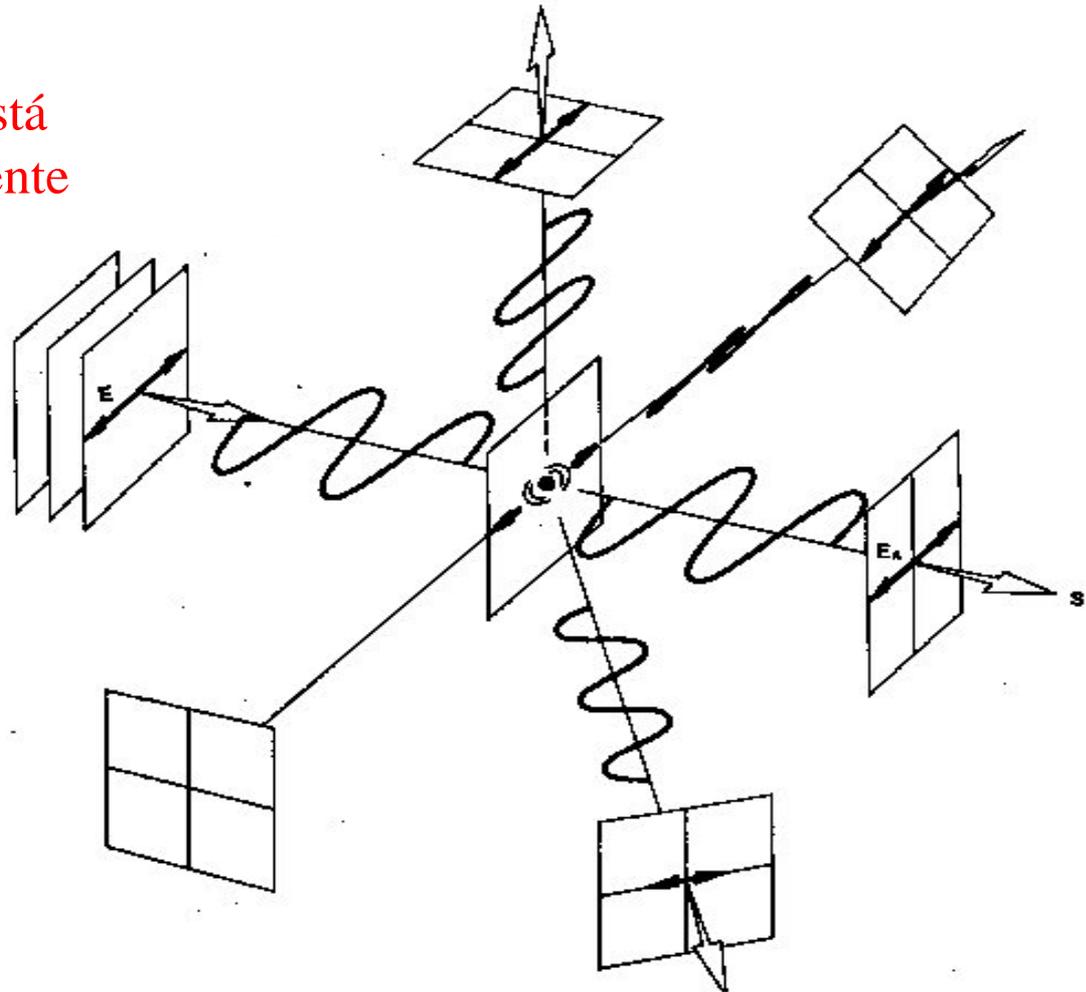
La luz incidente está polarizada linealmente



2. Interacción radiación-materia

Polarización de luz esparcida

La luz incidente está polarizada linealmente



2. Interacción radiación-materia

Polarización de luz esparcida

La luz incidente es natural

